

Matemática I — MA31K

Exercícios a serem entregues

Prof. Eduardo de Mattos Kalinowski

Atualizado em 28 de novembro de 2007

Observações: Detalhe ao máximo a sua solução. Apresente resultados intermediários obtidos durante a resolução das questões.

Dia 30/07

Sem exercícios para este dia.

Dia 31/07 — Interpretação Gráfica de Sistemas Lineares

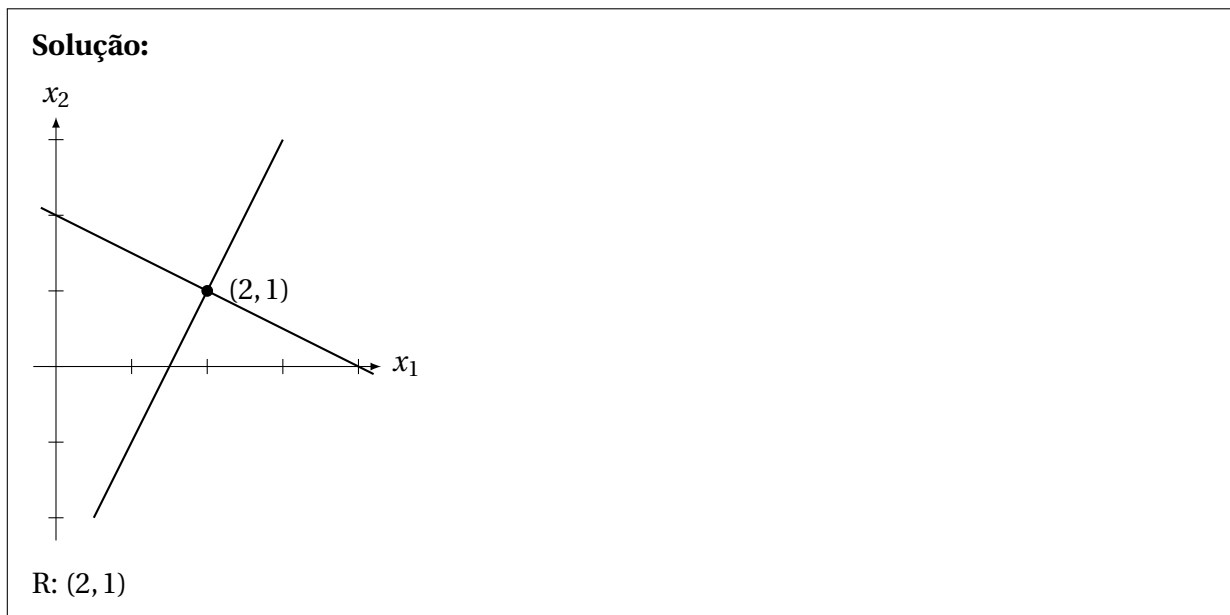
Exercício 1:

Resolva graficamente o sistema abaixo:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$2x_1 - x_2 = 3$$

Faça o desenho cuidadosamente e em escala. Se possível, use papel milimetrado.



Dia 02/08

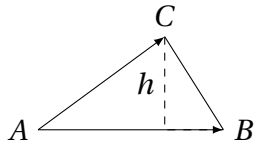
Sem exercícios para este dia.

Dia 06/08

Sem exercícios para este dia.

Exercício 2:

- (a) Usando os conceitos de comprimento de vetores e projeções, encontre uma fórmula para a área de um triângulo considerando seus lados como vetores.



- (b) Agora considere os pontos $A = (1, -1)$, $B = (2, 2)$ e $C = (4, 0)$. Com a fórmula acima, obtenha a área do triângulo formado por esses pontos.

Solução:

- (a) Da figura, vemos que a área pode ser obtida por

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \|\mathbf{h}\|$$

Para acharmos \mathbf{h} , fazemos

$$\mathbf{h} = \vec{AC} - \text{proj}_{\vec{AB}} \vec{AC}$$

logo

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \|\vec{AC} - \text{proj}_{\vec{AB}} \vec{AC}\|$$

- (b)

$$\vec{AB} = (1, 3) \quad \|\vec{AB}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\vec{AC} = (3, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{AB}} \vec{AC} &= \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2} \vec{AB} \\ &= \frac{3+3}{10} (1, 3) \\ &= \left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right) \end{aligned}$$

$$\vec{AC} - \text{proj}_{\vec{AB}} \vec{AC} = \left(3 - \frac{3}{5}, 1 - \frac{9}{5}\right)$$

$$\|\vec{AC} - \text{proj}_{\vec{AB}} \vec{AC}\| = \sqrt{\left(3 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{9}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \sqrt{10}$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{10} \frac{4}{5} \sqrt{10} = \frac{4}{10} 10 = 4$$

Exercício 3:

Determine a equação do plano que contém a reta

$$x = 2 + t$$

$$y = -1 + 3t$$

$$z = -2t$$

e o ponto $(3, 2, 1)$.

Solução:

O vetor diretor da reta é

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, -2)$$

Naturalmente, o plano é paralelo a esse vetor.

Vamos pegar um ponto qualquer da reta, por exemplo, quando $t = 0$,

$$P_0 = (2, -1, 0)$$

Esse ponto pertence ao plano, assim como

$$P_1 = (3, 2, 1)$$

Então

$$\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_0} = (1, 3, 1)$$

também é paralelo ao plano.

Um vetor normal ao plano é então

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (9, -3, 0)$$

Então a equação do plano é

$$9(x - 2) - 3(y + 1) + 0(z - 0) = 0$$

$$9x - 18 - 3y - 3 = 0$$

$$9x - 3y - 21 = 0$$

$$3x - y - 7 = 0$$

Dia 13/08 — Distâncias

Exercício 4:

- (a) Explique como podemos achar a distância entre duas retas paralelas usando os métodos vistos na aula.
- (b) Determine a distância entre as retas

$$\begin{aligned}(L_1) \quad x &= 1 + 2t & y &= 2 + t & z &= -2t \\(L_2) \quad x &= 4t & y &= 3 + 2t & z &= 1 - 4t\end{aligned}$$

Solução:

- (a) Basta acharmos a distância de um ponto qualquer da primeira reta à segunda reta.
- (b) Tomamos um ponto qualquer de L_1 :

$$A = (1, 2, 0)$$

E um qualquer de L_2 :

$$B = (0, 3, 1)$$

Então

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{BA} = (1, -1, -1)$$

$\mathbf{r}_2 = (4, 2, -4)$ é o vetor diretor de L_2

$$\text{proj}_{\mathbf{r}_2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \mathbf{r}_2 = \frac{4(1) + 2(-1) - 4(-1)}{4^2 + 2^2 + (-4)^2} (4, 2, -4) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}d(L_1, L_2) &= \|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}\| \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Dia 14/08 — Solução Numérica de Sistemas Lineares

Exercício 5:

O objetivo desse exercício é dar uma introdução ao tipo de problemas que ocorrem na prática quando um computador é usado para resolução de sistemas lineares.

Calculadoras e computadores armazenam números reais da seguinte maneira: 2007 é armazenado como $0,2007 \times 10^4$, o π é $0,3141 \times 10^1$, $-0,00473$ é $-0,473 \times 10^{-2}$, etc. De uma maneira geral, temos um número decimal M entre 0,1 e 1 (a *mantissa*) e um *expoente* k , e cada número é armazenado na forma $\pm M \times 10^k$.

A mantissa só pode ter um número determinado e limitado de algarismos, e o número de dígitos na mantissa é chamado o número de *algarismos significativos*.

Por causa da limitação no número de algarismos significativos, é necessário arredondar os números. Por exemplo, π numa calculadora com cinco algarismos significativos é representado por $0,31416 \times 10^1$. Isso introduz erros, e à medida que mais cálculos são feitos, os erros tendem a se acumular.

Para vermos o efeito desses erros na resolução de sistemas lineares, considere o sistema

$$\begin{aligned}4x + 996y &= 1000 \\ 753x - 453y &= 300\end{aligned}$$

Vamos resolvê-lo com aritmética exata:

$$\left[\begin{array}{ccc} 4 & 996 & 1000 \\ 753 & -453 & 300 \end{array} \right] L_2 \leftarrow L_2 - \frac{753}{4}L_1 \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc} 4 & 996 & 1000 \\ 0 & -187950 & -187950 \end{array} \right]$$

de onde tiramos a solução (1, 1).

Agora vejamos o que acontece se utilizarmos a aritmética com três algarismos significativos. O multiplicador é $\frac{753}{4} = 0,188 \times 10^3 = 188$. Vejamos os cálculos da nova linha 2 da matriz:

$$\begin{aligned}188(4) &= 0,752 \times 10^3 = 752 & 753 - 752 &= 1 \\ 188(996) &= 0,187 \times 10^6 = 187000 & -453 - 187000 &= -0,187 \times 10^6 = -187000 \\ 188(1000) &= 0,188 \times 10^6 = 188000 & 300 - 188000 &= -0,188 \times 10^6 = -188000\end{aligned}$$

Então

$$\left[\begin{array}{ccc} 4 & 996 & 1000 \\ 753 & -453 & 300 \end{array} \right] L_2 \leftarrow L_2 - 188L_1 \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc} 4 & 996 & 1000 \\ 1 & -187000 & -188000 \end{array} \right]$$

Observe que não obtivemos 0 abaixo do pivô. Com essa aritmética não é possível obter 0 por causa dos erros de arredondamento. Mas simplesmente zeramos os elementos abaixo do pivô, que nem precisariam ser calculados. Temos então o sistema

$$\begin{aligned}4x + 996y &= 1000 \\ -187000y &= -188000\end{aligned}$$

de onde tiramos

$$\begin{aligned}y &= \frac{-188000}{-187000} = 0,101 \times 10^1 = 1,01 \\ 4x + 996(1,01) &= 1000 \quad \therefore 4x + 1010 = 1000 \quad \therefore 4x = -10 \quad \therefore x = -2,5\end{aligned}$$

Note a diferença nos valores de x .

Considere agora o sistema

$$\begin{aligned}47x + 28y &= 19 \\ 89x + 53y &= 36\end{aligned}$$

- Resolva-o *exatamente*, isto é, trabalhe com frações.
- Resolva-o agora com três algarismos significativos. Use uma calculadora, tomando o cuidado de, sempre que for iniciar um cálculo, apagar o número da calculadora e digitar o número arredondado para três algarismos significativos novamente: assim você estará usando apenas três algarismos significativos em todos os cálculos. Em seguida, compare com o resultado exato obtido acima.

Solução:

(a)

$$\begin{bmatrix} 47 & 28 & 19 \\ 28 & 53 & 36 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{89}{47}L_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 47 & 28 & 19 \\ 0 & -\frac{1}{47} & \frac{1}{47} \end{bmatrix}$$

$$y = -1 \quad 47x + 28(-1) = 19 \quad \therefore x = 1$$

(b) O multiplicador é $\frac{89}{47} = 0,189 \times 10^1 = 1,89$ com três algarismos significativos. Então

$$\begin{bmatrix} 47 & 28 & 19 \\ 28 & 53 & 36 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 1,89L_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 47 & 28 & 19 \\ 0 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$y = 1 \quad 47x + 28(1) = 19 \quad \therefore x = -0,191$$

Podemos notar a grande diferença entre a solução e o valor obtido com aritmética aproximada.

Dia 16/08 — Solução Simultânea de Sistemas Lineares*Exercício 6:*

Os dois sistemas

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 2x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 = 5 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & 2x_1 + x_2 = -1 \\ & 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{array}$$

têm a mesma matriz de coeficientes, mas termos independentes diferentes. Resolva ambos os sistemas simultaneamente reduzindo a matriz aumentada correspondente aos dois sistemas

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

e usando substituição para os dois lados direitos.

Solução:

Reduzindo a matriz duplamente aumentada, obtemos

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

De onde tiramos dois sistemas equivalentes:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 2x_1 + x_2 = 3 \\ & x_2 = -1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & 2x_1 + x_2 = -1 \\ & x_2 = 3 \end{array}$$

Obtemos por substituição reversa as duas soluções:

$$\text{(a)} (2, -1) \quad \text{(b)} (-2, 3)$$

Dia 20/08 — Sistemas Lineares Homogêneos

Exercício 7:

Suponha que $\mathbf{c}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{c}_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ são duas soluções particulares para um sistema homogêneo.

- (a) Explique por que a soma delas $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ também é uma solução para o sistema.
(b) Explique por que a multiplicação $\alpha \mathbf{c}_1$ (onde $\alpha \in \mathbb{R}$) também é uma solução para o sistema.

Solução:

(a) Numa equação qualquer, temos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0$$

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n = 0$$

Somando as duas equações, temos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n = 0 + 0$$

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \dots + a_{in}(x_n + y_n) = 0$$

Então $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ é uma solução.

(b) Numa equação qualquer, temos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0$$

Multiplicando esta equação por α , temos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0$$

$$\alpha(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) = \alpha(0)$$

$$a_{i1}(\alpha x_1) + a_{i2}(\alpha x_2) + \dots + a_{in}(\alpha x_n) = 0$$

Então $\alpha \mathbf{c}_1$ é uma solução.

Dia 21/08

Sem exercícios para este dia.

Dia 23/08 — Multiplicação de Matrizes

Exercício 8:

Encontre matrizes não-nulas A , B e C tais que $AB = AC$, mas $B \neq C$.

Solução:

Há muitas possibilidades, mas eis um exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dia 27/08 — Transpostas

Exercício 9:

Prove que AA^T e $A^T A$ são matrizes simétricas qualquer que seja a matriz A .

Solução:

(AA^T) Seja A $m \times n$. Em primeiro lugar, note que a multiplicação AA^T é sempre possível pois temos a multiplicação de uma matriz $m \times n$ por uma $n \times m$. Para provar que uma matriz é simétrica, basta mostrar que $A = A^T$.

$$\begin{aligned} (AA^T)^T &= (A^T)^T A^T \\ &= AA^T \end{aligned}$$

$(A^T A)$ Usamos a mesma idéia:

$$\begin{aligned} (A^T A)^T &= A^T (A^T)^T \\ &= A^T A \end{aligned}$$

Dia 28/08

Sem exercícios para este dia.

Dia 30/08 — Fatoração LU

Exercício 10:

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Fazendo o escalonamento, obtemos

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Por causa do 0 em $[A']_{22}$, não podemos obter uma fatoração LU. Mas o escalonamento continua trocando as linhas 2 e 3, e chegamos à forma escada, que é triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

A matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

corresponde à permutação das linhas 2 e 3. Poderíamos trocar essas linhas de A antes de começar o escalonamento, e obteríamos U acima.

Calcule PA , e obtenha a fatoração LU de PA , isto é, encontre L e U tais que $PA = LU$.

Solução:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Dia 03/09

Avaliação 1.

Dia 04/09 — Espaços Vetoriais

Exercício 11:

É possível ter um espaço vetorial com apenas um elemento (que será o elemento nulo daquele espaço). Porém, não é possível ter um espaço vetorial com dois, três, ou qualquer outro número finito de elementos: se um espaço vetorial tiver dois ou mais elementos, ele terá que ter um número infinito de elementos. Explique por quê.

Solução:

Se tivermos, além do vetor nulo, outros vetores, podemos usar as operações que fazem parte do espaço vetorial para obter novos vetores: somando dois vetores, ou multiplicando um vetor por um escalar, obtemos um novo vetor que também pertence ao espaço vetorial. Então sempre podemos obter novos vetores a partir dos existentes, de forma que o número de vetores é ilimitado.

Dia 06/09 — Subespaços

Exercício 12:

Determine se o conjunto de todas as matrizes diagonais 2×2 é um subespaço de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Solução:

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ duas matrizes diagonais 2×2 . Então

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

que também é uma matriz diagonal, então o conjunto é fechado em relação à soma. Além disso,

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha a_2 \end{bmatrix}$$

que também é uma matriz diagonal, logo o conjunto das matrizes diagonais é fechado com relação à multiplicação com escalar também. Isto confirma que se trata de um subespaço do \mathbb{R}^2 .

Dia 10/09 — Independência Linear

Exercício 13:

Sejam \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 dois vetores de um espaço vetorial V . Mostre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é linearmente dependente se e somente se um vetor é múltiplo de outro.

Solução:

(\Rightarrow) Assuma que o conjunto é linearmente dependente. Então um vetor pode ser escrito como combinação linear dos outros. Seja \mathbf{v}_2 esse vetor, então $\mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1$, logo \mathbf{v}_2 é múltiplo de \mathbf{v}_1 .

(\Leftarrow) Assuma que um vetor, digamos \mathbf{v}_2 , é múltiplo do outro, isto é, $\mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1$. Então \mathbf{v}_2 é combinação linear dos outros vetores, e o conjunto é linearmente dependente.

Dia 11/09 — Bases

Exercício 14:

Considere os vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ gera \mathbb{R}^3 , mas não é linearmente independente. Retire um ou mais vetores desse conjunto para obter uma base para \mathbb{R}^3 .

Solução:

$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_5$, logo \mathbf{v}_3 pode ser descartado. Da mesma forma, $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{5}$, então \mathbf{v}_4 é descartado.

Os demais três vetores formam um conjunto linearmente independente, o que verificamos montando uma matriz com esses vetores nas colunas e vendo que ela é não singular (tem posto 3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{bmatrix}$$

Dia 13/09

Sem exercícios para este dia.

Dia 17/09 — Vetores de Coordenadas

Exercício 15:

Prove o resultado a seguir:

$$[\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}} = \alpha_1 [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} + \alpha_2 [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} + \cdots + \alpha_n [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}}$$

Dica: Use a indução matemática.

Solução:

Inicialmente, observe que para $n = 1$, o resultado é válido, conforme o teorema visto em aula.

Suponhamos que o resultado valha para algum k . Vamos provar então que ele vale para $k+1$.

$$\begin{aligned} & [\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}]_{\mathcal{B}} \\ &= [(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k) + \alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}]_{\mathcal{B}} && \text{Usando o teorema sobre soma,} \\ &= [\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k]_{\mathcal{B}} + [\alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}]_{\mathcal{B}} \\ &= [\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k]_{\mathcal{B}} + \alpha_{k+1} [\mathbf{v}_{k+1}]_{\mathcal{B}} && \text{Pela hipótese de indução,} \\ &= \alpha_1 [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} + \alpha_2 [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} + \cdots + \alpha_k [\mathbf{v}_k]_{\mathcal{B}} + \alpha_{k+1} [\mathbf{v}_{k+1}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Dia 18/09 — Mudança de Base

Exercício 16:

(a) Sejam \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} bases para um espaço vetorial V . Prove que

$$C_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = C_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$$

(b) Um caso especial é quando $\mathcal{C} = \mathcal{S}$, a base canônica. Neste caso,

$$C_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = C_{\mathcal{S},\mathcal{D}} C_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = (C_{\mathcal{D},\mathcal{S}})^{-1} C_{\mathcal{B},\mathcal{S}}$$

Isto nos dá uma outra maneira de obter a matriz de mudança de base, envolvendo a inversão de uma matriz e a multiplicação de duas matrizes, mas com a vantagem de serem matrizes facilmente obtidas.

Use este método para achar $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ para o exemplo das matrizes simétricas visto em aula, e confirme que os resultados são iguais.

OBS: Na prática, este método é mais trabalhoso que achar $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ diretamente.

Solução:

(a) Sejam \mathbf{v} um vetor de V .

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{D}} = C_{\mathcal{C},\mathcal{D}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

$$\therefore [\mathbf{v}]_{\mathcal{D}} = C_{\mathcal{C},\mathcal{D}} C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V$$

Então $C_{\mathcal{C},\mathcal{D}} C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ é a matriz de mudança de base de \mathcal{B} para \mathcal{D} , logo

$$C_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = C_{\mathcal{C},\mathcal{D}} C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

(b)

$$C_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{\mathcal{C},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (C_{\mathcal{C},\mathcal{S}})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(C_{\mathcal{C},\mathcal{S}})^{-1} C_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dia 20/09 — Espaço Coluna

Exercício 17:

Sejam $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$. Mostre que

$$\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$$

Isto é, mostre que todo $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(AB)$ pertence também a $\mathcal{R}(A)$.

Solução:

Seja $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(AB)$. Então existe um $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$AB\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Chame $B\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Então

$$A\mathbf{w} = \mathbf{y}$$

Então $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(A)$, e $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Dia 24/09

Sem exercícios para este dia.

Dia 25/09 — Os quatro subespaços fundamentais

Exercício 18:

Ache bases para os quatro subespaços associados à matriz A . Indique as dimensões desses espaços.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Reduzimos a matriz A à forma escada, e obtemos

$$E(A) = \begin{bmatrix} \boxed{-3} & 1 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}$$

Para uma base de $\mathcal{R}(A)$, pegamos as três primeiras colunas de A , já que há pivôs nas três primeiras colunas de $E(A)$:

$$\mathcal{R}(A) = \text{ger} \left(\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \right), \quad \dim(\mathcal{R}(A)) = 3$$

Para uma base de $\mathcal{R}(A^T)$, pegamos as linhas não-nulas de $E(A)$:

$$\mathcal{R}(A^T) = \text{ger} \left(\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right), \quad \dim(\mathcal{R}(A^T)) = 3$$

Para achar uma base para o núcleo, resolvemos o sistema linear homogêneo com matriz de coeficientes A :

$$x_3 = 0$$

$$7x_2 = 2x_4 \therefore x_2 = \frac{2}{7}x_4$$

$$-3x_1 = -4x_4 - x_2 \therefore -3x_1 = -4x_4 - \frac{2}{7}x_4 \therefore x_1 = \frac{10}{7}x_4$$

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathcal{N}(A) = \text{ger} \left\{ \left(\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad \dim(\mathcal{N}(A)) = 1$$

Agora achamos a transposta de A e resolvemos o sistema homogêneo $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_1 = 0$$

$$\mathcal{N}(A^T) = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim(\mathcal{N}(A^T)) = 0$$

Dia 27/09 — Transformações Lineares

Exercício 19:

Prove que para qualquer transformação linear $T: U \rightarrow V$, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Solução:

Seja $\mathbf{v} \in U$.

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Exercício 20:

Considere a transformação linear

$$T: P_3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, T(a + bx + cx^2 + d) = \begin{bmatrix} 3a + 7b - 2c - 5d & 8a + 14b - 2c - 11d \\ -4a - 8b + 2c + 6d & 12a + 22b - 4c - 17d \end{bmatrix}$$

Seja $p(x) = 3 - x + 2x^2 - 5x^3$.

(a) Calcule $T(p(x))$ diretamente.

(b) Considere as bases canônicas

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

para P_3 e $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, respectivamente. Ache $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$, e em seguida $[p(x)]_{\mathcal{B}}$. Faça uma multiplicação de matrizes para encontrar $[T(p(x))]_{\mathcal{C}}$. Com base nessa representação, encontre $T(p(x))$.

(c) Agora sejam

$$\mathcal{F} = \{1 + x - x^2 + 2x^3, -1 + 2x + 2x^3, 2 + x - 2x^2 + 3x^3, 1 + x + 2x^3\}$$

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

bases para P_3 e $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, respectivamente. Ache $[T]_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$, e $[p(x)]_{\mathcal{F}}$, e use isso para encontrar $[T(p(x))]_{\mathcal{G}}$. Finalmente, encontre $T(p(x))$ com base na sua representação na base \mathcal{G} .

Solução:

(a)

$$T(3 - x + 2x^2 - 5x^3) = \begin{bmatrix} 9 - 7 - 4 + 25 & 24 - 14 - 4 + 55 \\ -12 + 8 + 4 - 30 & 36 - 22 - 8 + 85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 61 \\ -30 & 91 \end{bmatrix}$$

(b)

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \quad T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -8 & 22 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad T(\mathbf{b}_4) = \begin{bmatrix} -5 & -11 \\ 6 & -17 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & -5 \\ 8 & 14 & -2 & -11 \\ -4 & -8 & 2 & 6 \\ 12 & 22 & -4 & -17 \end{bmatrix}$$

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$[T(p(x))]_{\mathcal{G}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{G}} [p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & -5 \\ 8 & 14 & -2 & -11 \\ -4 & -8 & 2 & 6 \\ 12 & 22 & -4 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 61 \\ -30 \\ 91 \end{bmatrix}$$

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} 23 & 61 \\ -30 & 91 \end{bmatrix}$$

(c)

$$T(\mathbf{f}_1) = \begin{bmatrix} 3+7+2-10 & 8+14+2-22 \\ -4-8-2+12 & 12+22+4-34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 2\mathbf{g}_1$$

$$T(\mathbf{f}_2) = \begin{bmatrix} -3+14-10 & -8+28-22 \\ 4-16+12 & -12+44-34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -\mathbf{g}_2$$

$$T(\mathbf{f}_3) = \begin{bmatrix} 6+7+4-15 & 16+14+4-33 \\ -8-8-4+18 & 24+22+8-51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{g}_3$$

$$T(\mathbf{f}_4) = \begin{bmatrix} 3+7-10 & 8+14-22 \\ -4-8+12 & 12+22-34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$[T]_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para acharmos $[p(x)]_{\mathcal{F}}$, fazemos

$$\alpha_1(1+x-x^2+2x^3) + \alpha_2(-1+2x+2x^3) + \alpha_3(2+x-2x^2+3x^3) + \alpha_4(1+x+2x^3) = 3-x+2x^2-5x^3$$

De onde tiramos o sistema com matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Assim, $[p(x)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 32 \\ -7 \\ -17 \\ -2 \end{bmatrix}$. Agora fazemos a multiplicação:

$$[T(p(x))]_{\mathcal{G}} = [T]_{\mathcal{F},\mathcal{G}} [p(x)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ -7 \\ -17 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 7 \\ -17 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agora achamos $T(p(x))$:

$$T(p(x)) = 64\mathbf{g}_1 + 7\mathbf{g}_2 - 17\mathbf{g}_3 + 0\mathbf{g}_4 = 64 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 17 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 61 \\ -30 & 91 \end{bmatrix}$$

Exercício 21:

Considere as duas transformações lineares

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow P_2, \quad T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = (-a + 3b) + (2a + 4b)x + (a - 2b)x^2$$

$$L: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad L(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a + b + 2c & a + 4b - c \\ -a + 3c & 3a + b + 2c \end{bmatrix}$$

e bases para \mathbb{R}^2 , P_2 e $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, respectivamente

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \{1 - 2x + x^2, -1 + 3x, 2x + 3x^2\}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

- Encontre as matrizes $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ e $[L]_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}$.
- Ache uma expressão para $L \circ T$, lembrando que $(L \circ T)(\mathbf{v}) = L(T(\mathbf{v}))$.
- Com a expressão acima, obtenha $[L \circ T]_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}$. Multiplique as matrizes $[L]_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}$ e $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ obtidas anteriormente e compare os resultados.

Solução:

- Inicialmente, vamos encontrar $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$:

$$T(\mathbf{b}_1) = (-3 + 3) + (6 + 4)x + (3 - 2)x^2 = 10x + x^2$$

$$T(\mathbf{b}_2) = (-2 + 3) + (4 + 4)x + (2 - 2)x^2 = 1 + 8x$$

Para achar $[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}}$ e $[T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}}$, montamos os sistemas

$$\alpha_1(1 - 2x + x^2) + \alpha_2(-1 + 3x) + \alpha_3(2x + 3x^2) = 10x + x^2$$

$$\alpha_1(1 - 2x + x^2) + \alpha_2(-1 + 3x) + \alpha_3(2x + 3x^2) = 1 + 8x$$

De onde montamos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 10 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 28 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 29 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -11 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 28 & 33 \\ 29 & 32 \\ -9 & -11 \end{bmatrix}$$

Agora vamos encontrar $[L]_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}$:

$$L(\mathbf{c}_1) = \begin{bmatrix} 2 - 2 + 2 & 1 - 8 - 1 \\ -1 + 3 & 3 - 2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L(\mathbf{c}_2) = \begin{bmatrix} -2 + 3 & -1 + 12 \\ 1 & -3 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L(\mathbf{c}_3) = \begin{bmatrix} 2 + 6 & 8 - 3 \\ 9 & 2 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Agora montamos uma equação para achar $[L(\mathbf{c}_1)]_{\mathcal{D}}$:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtemos um sistema, e fazendo o mesmo processo, outros sistemas com o mesmo lado esquerdo para cada um dos vetores. Com isso montamos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ -2 & -1 & 2 & -3 & -8 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & 26 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -21 & 51 & 67 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 17 & -38 & -46 \end{bmatrix}$$

$$[L]_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -11 & 26 & 34 \\ -21 & 51 & 67 \\ 0 & 0 & 1 \\ 17 & -38 & -46 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} (L \circ T) \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) &= L(T((-a+3b) + (2a+4b)x + (a-2b)x^2)) \\ &= \begin{bmatrix} 2(-a+3b) + (2a+4b) + 2(a-2b) & (-a+3b) + 4(2a+4b) - (a-2b) \\ -(-a+3b) + 3(a-2b) & 3(-a+3b) + (2a+4b) + 2(a-2b) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a+6b & 6a+21b \\ 4a-9b & a+9b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c)

$$(L \circ T)(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 6+6 & 18+21 \\ 12-9 & 3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 39 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(L \circ T)(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 4+6 & 12+21 \\ 8-9 & 2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 33 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 39 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 33 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 12 & 10 \\ -2 & -1 & 2 & -3 & 39 & 33 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 12 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 114 & 95 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 237 & 202 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -174 & -149 \end{bmatrix}$$

$$[L \circ T]_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 114 & 95 \\ 237 & 202 \\ -9 & -11 \\ -174 & -149 \end{bmatrix}$$

$$[L]_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -11 & 26 & 34 \\ -21 & 51 & 67 \\ 0 & 0 & 1 \\ 17 & -38 & -46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 & 33 \\ 29 & 32 \\ -9 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114 & 95 \\ 237 & 202 \\ -9 & -11 \\ -174 & -149 \end{bmatrix}$$

Dia 04/10 — Semelhança

Exercício 22:

Prove que, se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$. Em outras palavras, prove que a relação de semelhança é *transitiva*.

Solução:

Como $A \sim B$, existe S tal que

$$A = S^{-1}BS$$

Como $B \sim C$, existe R tal que

$$B = R^{-1}CR$$

Então

$$A = S^{-1}R^{-1}CRS$$

Chamando $Q = RS$, $Q^{-1} = S^{-1}R^{-1}$, e

$$A = Q^{-1}BQ$$

Logo, $A \sim C$.

Dia 08/10 — Transformações Lineares Injetoras

Exercício 23:

Prove que, se $T: U \rightarrow V$ e $L: V \rightarrow W$ são injetoras, $L \circ T$ é também injetora.

Solução:

Sejam \mathbf{x} e $\mathbf{y} \in U$. Assuma que

$$(L \circ T)(\mathbf{x}) = (L \circ T)(\mathbf{y})$$

$$L(T(\mathbf{x})) = L(T(\mathbf{y}))$$

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \quad L \text{ é injetora}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad T \text{ é injetora}$$

Então $L \circ T$ é injetora.

Dia 09/10 — Transformações Lineares Sobrejetoras

Exercício 24:

Prove que, se $T: U \rightarrow V$ e $L: V \rightarrow W$ são sobrejetoras, $L \circ T$ é também sobrejetora.

Solução:

Seja $\mathbf{w} \in W$. Como L é sobrejetora, existe um $\mathbf{v} \in V$ tal que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. E como T é sobrejetora, existe um $\mathbf{u} \in U$ tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. Então

$$\begin{aligned}(L \circ T)(\mathbf{u}) &= L(T(\mathbf{u})) \\ &= L(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{w}\end{aligned}$$

Desta forma, para qualquer $\mathbf{w} \in W$ existe um $\mathbf{u} \in U$ tal que $(L \circ T)(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$, e portanto $L \circ T$ é sobrejetora.

Dia 11/10

Sem exercícios para este dia.

Dia 15/10

Avaliação 2.

Dia 16/10 — Transformações Lineares Inversíveis

Exercício 25:

Seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear e seja $\dim(U) \neq \dim(V)$. T pode ser inversível? Explique.

Solução:

Não. Suponha que T é inversível. Sabemos que

$$n(T) + r(T) = \dim(U)$$

Como T é injetora, $n(T) = 0$. Como T é sobrejetora, $r(T) = \dim(V)$. Então

$$0 + \dim(V) = \dim(U) \therefore \dim(U) = \dim(V)$$

o que contradiz a hipótese, logo T não é inversível.

Outra maneira de explicar é: Suponha que T é inversível. Então T é injetora, e $\dim(U) \leq \dim(V)$. Mas T é também sobrejetora, então $\dim(U) \geq \dim(V)$. Logo $\dim(U) = \dim(V)$.

Dia 18/10

Sem exercícios para este dia.

Dia 22/10 — Isomorfismos

Exercício 26:

Sejam U , V e W três espaços vetoriais. Mostre que se $U \cong V$ e $V \cong W$, então $U \cong W$.

Solução:

Como $U \cong V$, existe uma transformação linear inversível $T_1: U \rightarrow V$, e como $V \cong W$, existe uma transformação linear inversível $T_2: V \rightarrow W$. Seja agora

$$T: U \rightarrow W, \quad T = T_2 \circ T_1$$

T_1 e T_2 são injetoras, logo T é injetora. T_1 e T_2 são sobrejetoras, logo T é sobrejetora. Então T é inversível, e $U \cong W$.

Outra maneira de mostrar isso é observando que se $U \cong V$, $\dim(U) = \dim(V)$. Mas se $V \cong W$, $\dim(V) = \dim(W)$. Portanto, $\dim(U) = \dim(W)$ e U e W são isomorfos.

Dia 23/10 — Espaços Ortogonais

Exercício 27:

É possível o espaço linha de uma matriz conter o vetor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e o espaço nulo conter o vetor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} ? \text{ Explique.}$$

Solução:

Não, pois $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3$, logo \mathbf{u} e \mathbf{v} não são ortogonais, mas $\mathcal{R}(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$, logo qualquer vetor de $\mathcal{R}(A^T)$ tem que ser ortogonal a qualquer vetor de $\mathcal{N}(A)$.

Dia 25/10

Sem exercícios para este dia.

Dia 29/10 — Bases ortonormais

Exercício 28:

Explique por que qualquer conjunto ortogonal de n vetores é uma base para o \mathbb{R}^n .

Solução:

Um conjunto ortogonal é sempre linearmente independente. Então temos um conjunto linearmente independente de n vetores. Podemos então afirmar que é uma base, pois qualquer conjunto linearmente independente de n vetores do \mathbb{R}^n gera este espaço.

Dia 30/10 — Gram-Schmidt

Exercício 29:

Considere o espaço P_3 com o produto interno

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

Considere também conjunto $S = \{1, x, x^2, x^3\}$. Aplique o processo de Gram-Schmidt a esses vetores para obter uma conjunto ortogonal de polinômios (não é necessário normalizá-los). Os polinômios obtidos dessa maneira são os *Polinômios de Legendre*. O processo poderia ser continuado com x^4, x^5 , etc.

Solução:

$$\mathbf{q}_1 = 1$$

$$\mathbf{q}_2 = x - \text{proj}_{\mathbf{q}_1} \mathbf{v}_2 = x - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{q}_1 \rangle}{\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 \rangle} \mathbf{q}_1$$

$$= x - \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 1 dx} (1) = x - \frac{0}{2} (1)$$

$$= x$$

$$\mathbf{q}_3 = x^2 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_1 \rangle}{\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 \rangle} \mathbf{q}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_2 \rangle}{\langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2 \rangle} \mathbf{q}_2$$

$$= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} (1) - \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} (x) = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} (1) - \frac{0}{\frac{2}{3}} x$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{q}_4 = x^3 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{q}_1 \rangle}{\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 \rangle} \mathbf{q}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{q}_2 \rangle}{\langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2 \rangle} \mathbf{q}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{q}_3 \rangle}{\langle \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_3 \rangle} \mathbf{q}_3$$

$$= x^3 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} (1) - \frac{\int_{-1}^1 x^4 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} (x) - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx}{\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= x^3 - \frac{0}{2} (1) - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} (x) - \frac{0}{\frac{8}{45}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= x^3 - \frac{3}{5} x$$

Dia 01/11

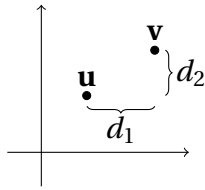
Sem exercícios para este dia.

Dia 05/11 — Normas

Exercício 30:

Seja $d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_\infty$, isto é, a distância medida pela norma uniforme. Considerando o \mathbb{R}^2 , qual a interpretação geométrica para $d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v})$?

Solução:



Dados os pontos terminais dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} , $d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é a maior entre as distâncias d_1 e d_2 da figura, as distâncias horizontal e vertical entre os pontos.

Dia 06/11 — Mínimos Quadrados

Exercício 31:

Podemos usar o método de mínimos quadrados também para aproximar pontos por outras curvas que não uma reta. Por exemplo, queremos a parábola que melhor aproxima os pontos $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(2, 2)$. Para encontrá-la, procuramos os escalres a , b e c que geram a parábola $y = a + bx + cx^2$ que corresponde ao menor erro.

Substituindo os pontos na equação, você encontrará um sistema incompatível. Resolva-o por mínimos quadrados e obtenha a equação da parábola.

Solução:

Substituindo os pontos, obtemos

$$\begin{array}{rcl} a - b + c = 1 \\ a & = & -1 \\ a + b + c = 0 \\ a + 2b + 4c = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

As equações normais são

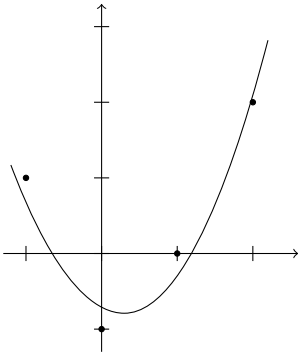
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

cuja solução é

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{10} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então a parábola que melhor aproxima os pontos é

$$y = -\frac{7}{10} - \frac{3}{5}x + x^2$$



Dia 08/11 — Cálculo de Determinantes

Exercício 32:

Encontre todos os valores de λ para os quais o determinante da matriz abaixo é 0:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ -1 & -2 - \lambda & -3 \\ 1 & -2 & -1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Solução:

$$A_{1,1} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -3 \\ -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda - 4$$

$$A_{1,2} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda + 8$$

$$A_{1,3} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 - \lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\lambda + 12$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= A_{1,1} - A_{1,2} + A_{1,3} \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda - 4 - (2\lambda + 8) + 3\lambda + 12 \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 8\lambda \end{aligned}$$

Agora igualamos a 0:

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 8\lambda = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \therefore \lambda = -4 \text{ ou } \lambda = 2$$

R: $\lambda = -4, \lambda = 0$ ou $\lambda = 2$.

Dia 12/11 — Propriedades dos Determinantes

Exercício 33:

Mostre que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ se A é não-singular.

Solução:

Se A é não singular, A^{-1} existe e $AA^{-1} = I$. Então

$$\det(AA^{-1}) = \det(I)$$

$$\det(A) \det(A^{-1}) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Dia 13/11

Sem exercícios para este dia.

Dia 19/11 — Diagonalização

Exercício 34:

Para uma matriz quadrada A , podemos calcular A^n multiplicando-se n vezes:

$$A^n = AA \cdots A$$

Mas se A for diagonalizável, isto é, se $A = XDX^{-1}$, podemos simplificar os cálculos fazendo

$$\begin{aligned} A^n &= (XDX^{-1})(XDX^{-1}) \cdots (XDX^{-1}) \\ &= XDD \cdots DX^{-1} \\ &= XD^n X^{-1} \end{aligned}$$

Calcule A^5 para a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução:

A matriz tem autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 6$ com autovetores correspondentes

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

Calcular D^5 é fácil:

$$D^5 = \begin{bmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & 6^5 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & 6^5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2754 & 2511 \\ 5022 & 5265 \end{bmatrix}$$

Dia 20/11

Sem exercícios para este dia.

Dia 22/11 — Cônicas

Exercício 35:

Identifique e esboce a cônica

$$13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 + (8 + 16\sqrt{3})x - (16 - 8\sqrt{3})y + 16 = 0$$

Solução:

A matriz A é

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$$

que é diagonalizada por

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Fazemos a mudança de variáveis $\mathbf{x} = Q\dot{\mathbf{x}}$. Isso elimina o termo misto. Os termos em x e y são $[8 + 16\sqrt{3} \quad -16 + 8\sqrt{3}] \mathbf{x}$, logo se tornam

$$[8 + 16\sqrt{3} \quad -16 + 8\sqrt{3}] Q\dot{\mathbf{x}} = [8 + 16\sqrt{3} \quad -16 + 8\sqrt{3}] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = [32 \quad 16] \dot{\mathbf{x}}$$

Temos então

$$16\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 + 32\dot{x} + 16\dot{y} + 16 = 0$$

$$4\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 8\dot{x} + 4\dot{y} + 4 = 0$$

$$4(\dot{x}^2 + 2\dot{x}) + (\dot{y}^2 + 4\dot{y}) = -4$$

$$4(\dot{x}^2 + 2\dot{x} + 1) + (\dot{y}^2 + 4\dot{y} + 4) = -4 + 4 + 4$$

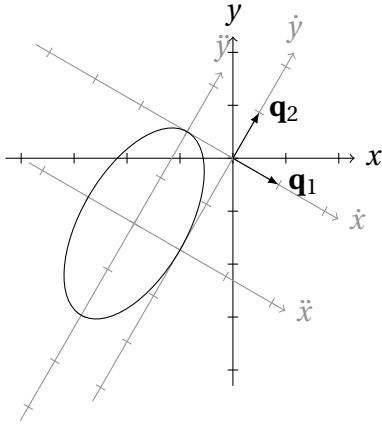
$$4(\dot{x} + 1)^2 + (\dot{y} + 2)^2 = 4$$

Agora chamamos $\tilde{x} = \hat{x} + 1$ e $\tilde{y} = \hat{y} + 2$, e obtemos

$$4\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 4$$

$$\tilde{x}^2 + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$$

que é a equação de uma elipse:



Dia 26/11

Sem exercícios para este dia.

Dia 27/11

Avaliação 2.